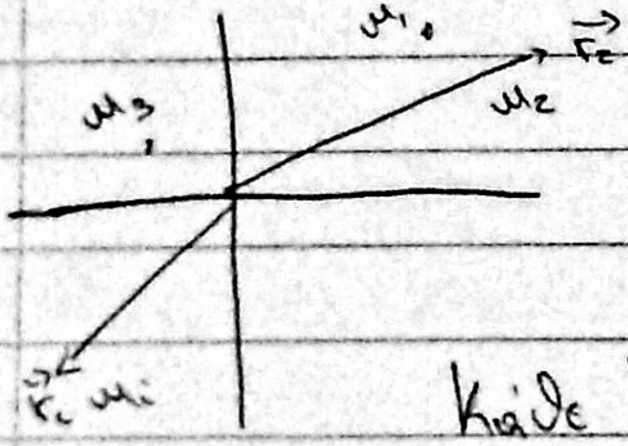
17/02/16

Μάζες κατανεμημένες στο επίπεδο



Κάθε μάζα χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα θέσης: $\vec{r_i} = x_i\hat{i} + y_i\hat{j}$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ μοναδιαία διανύσματα

Η συνολική μάζα του συστήματος είναι: $m = \sum_i m_i$

Κάθε μάζα m_i έχει μια ροπή τόσο ως προς τον άξονα x, όσο και ως προς τον άξονα y. Η ροπή ως προς τον άξονα x είναι $M_x = \sum_i m_i y_i$ και αντίστοιχα ως προς τον y: $M_y = \sum_i m_i x_i$

Το κέντρο μάζας θα έχει συντεταγμένες τα σημεία για τα οποία δεν υπάρχει ροπή ούτε ως προς τον άξονα x, ούτε ως προς τον άξονα y. Δηλαδή,

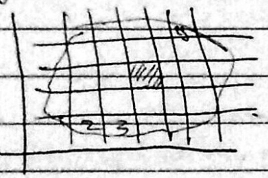
$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$$

Παρατήρηση

Οι ευθείες $y=\bar{y}$, $x=\bar{x}$ αντιστοιχούν στις ευθείες στις οποίες ισορροπεί το σύστημα

Λεπτά και επίπεδα σώματα με συνεχή κατανομή μάζας

Θεωρούμε ένα λεπτό και επίπεδο σώμα οποιουδήποτε σχήματος, για παράδειγμα ένα δίσκο αλουμινίου. Γνωρίζουμε μόνο την κατανομή μάζας του υλικού. Ζητούμε το κέντρο μάζας του



ΔA
Δm
$\rho = \rho(x,y)$

Η ροπή ως προς τον άξονα x μιας στοιχειώδους μάζας είναι $M_{ix} = \underbrace{\rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}}_{\Delta m_{ij}} y_{ij}$, και ως προς τον άξονα y: $M_{iy} = \underbrace{\rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}}_{\Delta m_{ij}} x_{ij}$

Αθροίζω: $M_x = \lim\limits_{i,j\to+\infty} \sum_i \sum_j y_{ij}\, \rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$

$$M_y = \lim_{i,j\to+\infty} \sum_i \sum_j x_{ij}\, \rho(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$$

$$M_x = \iint_D \rho(x,y)\, y\, dA, \quad M_y = \iint_D \rho(x,y)\, x\, dA$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D \rho(x,y)\, x\, dA}{\iint_D \rho(x,y)\, dA}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D \rho(x,y)\, y\, dA}{\iint_D \rho(x,y)\, dA}$$

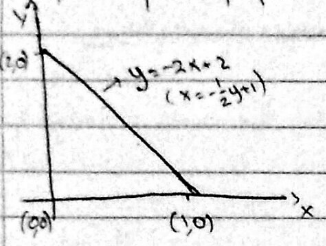
Στην ειδική περίπτωση που η πυκνότητα μάζας είναι σταθερή, $\rho(x,y)=\rho\in\mathbb{R}$, τότε:

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,dA}{\iint_D dA}, \quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\,dA}{\iint_D dA}$$

και το κέντρο μάζας καλείται κεντροειδές

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί το κέντρο μάζας λεπτού, επίπεδου στρώματος τριγωνικού σχήματος με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ και $\rho(x,y)=1+3x+y$



$$m=\iint_D \rho\,dA=\int_0^2\int_0^{-y/2+1}(1+3x+y)\,dx\,dy$$

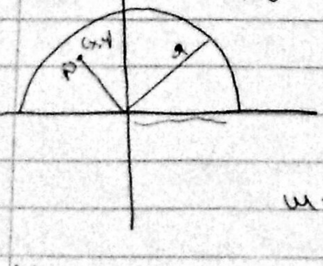
$$=\int_0^2\int_0^{-2x+2}(1+3x+y)\,dy\,dx=8/3$$

$$M_x=\int_0^2\int_0^{-y/2+1}(1+3x+y)\,y\,dx\,dy, \quad M_y=\int_0^2\int_0^{-y/2+1}(1+3x+y)\,x\,dx\,dy$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{11/3}{8/3}=11/8, \quad \bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{1}{8/3}=3/8$$

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ημικυκλικού στρώματος του οποίου η πυκνότητα μάζας είναι ανάλογη με την απόσταση από το κέντρο του



$$\rho(x,y)=\lambda\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}, \quad |\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$m=\iint_D \rho(x,y)\,dA$$

Χρησιμοποιώ πολικές συντεταγμένες: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, $J=r$

$$m=\int_0^{\pi}\int_0^{a}\lambda\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\;\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}=\int_0^{\pi}\int_0^{a}\lambda r^2\,dr\,d\theta=\lambda\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a}r^2\,dr=\frac{\lambda\pi a^3}{3}$$

(Σε καρτεσιανές θα ήταν $m=\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\lambda\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$)

$$M_y=\iint_D \rho(x,y)x\,dA=\int_0^{\pi}\int_0^{a}\underbrace{\lambda r}_{\rho(x,y)}\cdot\underbrace{r\cos\theta}_{x}\;\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}$$

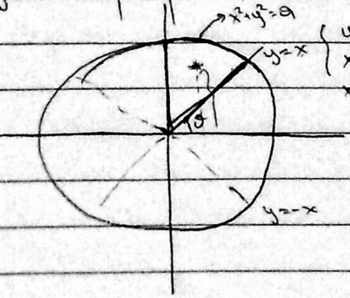
$$=\lambda\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{a}r^3\,dr=0$$

$$M_x=\int_0^{\pi}\int_0^{a}\underbrace{\lambda r}_{\rho(x,y)}\cdot\underbrace{r\sin\theta}_{y}\;\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}=\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a}r^3\,dr=\frac{\lambda a^4}{2}$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=0,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{3a}{2\pi}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί το σημείο που πρέπει να κρατάω ένα κομμάτι πίτσα για να μη μου πέσει



$\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=a \end{cases}$

$x=a/\sqrt{2}$

$$m=\iint_D \rho\,dA=\rho\iint_D dA=\rho\int_0^{a\sqrt{2}/2}\int_x^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\,dx$$

Χρησιμοποιώ κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$m=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{a}\rho\,r\,dr\,d\theta=\rho\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a}r\,dr=\frac{\rho\pi a^2}{8}$$

$$M_y=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{a}\rho\,\underbrace{r\cos\theta}_{x}\;\underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}=\rho\frac{2-\sqrt{2}}{6}a^3,\quad M_x=\rho\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a}r^2\,dr=\frac{\rho\sqrt{2}a^3}{6}$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{4}{3\pi}(2-\sqrt{2})a \quad , \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{3\pi}\sqrt{2}a$

$\tan\theta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} , \theta = \pi/4 + \pi/8 = 3\pi/8$

Παρατηρήσεις

1) Για σχήματα με σταθερή πυκνότητα μάζας θα εκμεταλλεύομαι τη συμμετρία του σχήματος, αν υπάρχει

2) Σε κυκλικά, κυλινδρικά, σφαιρικά σχήματα θα χρησιμοποιώ αντίστοιχες συντεταγμένες (δεν ξεχνώ την Ιακωβιανή)

Αν στο παράδειγμα προσθέσω ένα κομμάτι στην πίτσα αυτό θα έχει κέντρο (x_0, y_0) στην $\rho(x,y) = \rho + A e^{-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$